Лекция 9

Determining How Well Two Pictures Match

Given images I_1 and I_2:

1. Sum magnitude of differences between pixels: $\Sigma_x \Sigma_y |I_1 - I_2|$.
2. Sum squares of differences: $\Sigma_x \Sigma_y |I_1 - I_2|^2$.
3. Based on Schwartz Inequality: For any two integrable functions (real-valued, non-negative, not identically zero):

$$(\int f \cdot g)^2 \leq \int f^2 \cdot \int g^2$$

over any domain of integration for which integrals are all defined. The two are equal if and only if $g = cf$ for constant c (i.e. g is a scalar multiple of f), Corollary 1

$$\frac{\int f \cdot g}{\sqrt{f^2 \cdot g^2}} \leq 1$$

Once again, the equality holds if $g = cf$.

Corollary 2

Define *cross-correlation:*

$$f \otimes g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v) g(u+x, v+y)\, du dv$$

Normalized cross-correlation operator:

$$\frac{f \otimes g}{\sqrt{\int\int f^2 \cdot \int\int g^2}} \leq 1$$

Cross-correlation

The **cross-correlation**[1] operation is defined as

$$f \otimes g \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\; g(x+u, y+v)\, du\, dv$$

which takes in f and g and returns a function of variables x and y.

Corollary

This corollary follows from the **Schwarz inequality**:

$$\frac{f \otimes g}{\sqrt{\iint f^2}\sqrt{\iint g^2}} \begin{cases} = 1 & \text{at positions } (x,\, y) \text{ for which } g = cf, \\ \leq 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Now let's consider the *discrete* version of function f.
Suppose $F(X, Y)$ is an $M \times M$ "digital filter" (a digital image extended to include the possibility that certain pixel values may be negative.), where M is an odd number.
Suppose that $I(X, Y)$ is an $N \times N$ image, where $N \gg M$.

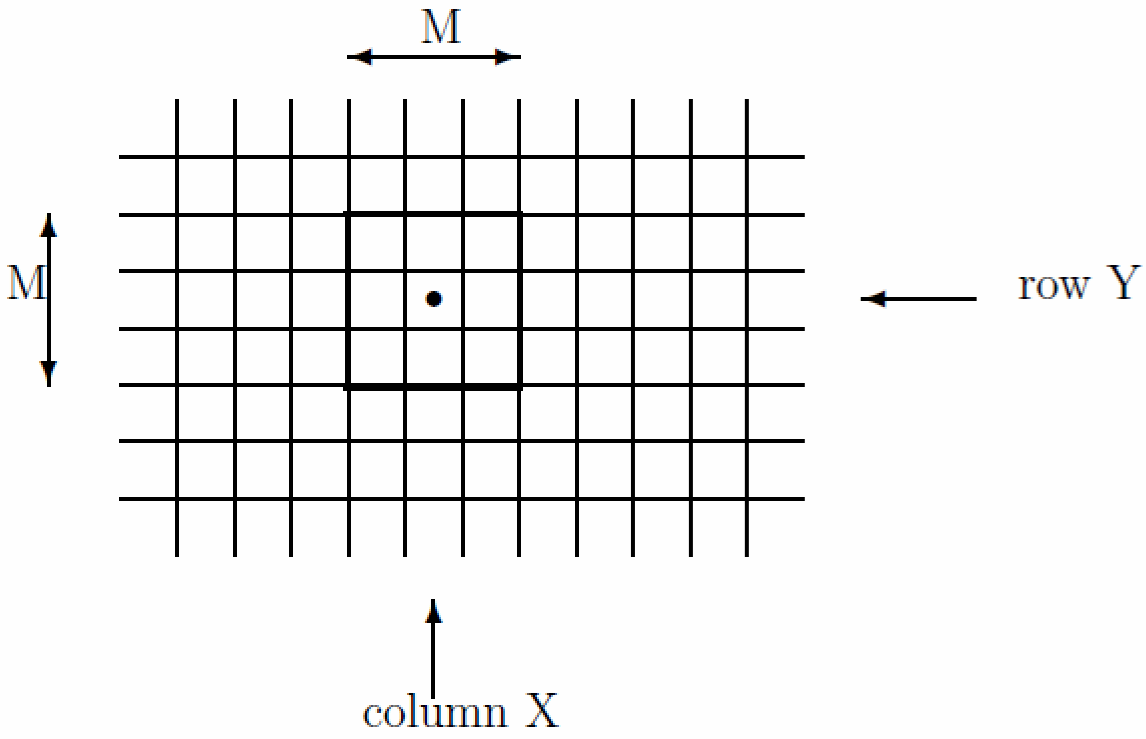


Figure 1: Discrete Filter

Suppose (X, Y) is the point we are looking at, the filter will be covering (with respect to image I) the range $[X - \lfloor M/2 \rfloor,\ X + \lfloor M/2 \rfloor]$ and $[Y - \lfloor M/2 \rfloor,\ Y + \lfloor M/2 \rfloor]$. (Figure 1 illustrates the case $M = 3$.)

The correlation process involves moving the filter F over a finite image I a pixel (a square grid in the above diagram) at a time, and to compute a new image $I'(X,Y)$, where

$$I'(X,Y) = \sum_{j=-\lfloor M/2 \rfloor}^{\lfloor M/2 \rfloor} \sum_{i=-\lfloor M/2 \rfloor}^{\lfloor M/2 \rfloor} F(i,j)\, I(X+i, Y+j)$$

For each point (X,Y) in image I, there are M^2 multiplications, and $M^2 - 1$ additions. Since there are N^2 points in image I, if $M \approx N$, then we will have $O(N^4)$ complexity. This is quite an expensive operation, and we would definitely be interested in trying to speed up the operation. We will see later how to speed up cross-correlation using convolution and the Fourier transform.

If part of the filter $F(X, Y)$ is out of the boundary of image I, then we may end up having *artifacts* in the resulting image I'.
This is known as the *boundary effect* and there are several ways to handle this problem:

1. use only a portion of the $N \times N$ image I defined inside the a particular region for correlation, such as $\lfloor M/2 \rfloor \leq X, Y \leq N - \lfloor M/2 \rfloor$.
2. assume that the magnitude of I outside its boundary is 0.
3. use the *wrap-around* method to define magnitude of I outside its boundary.

Convolution

The **convolution** operation is defined as

$$f * g \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, g(x-u, y-v)\, du\, dv$$

The above equation can be rewritten as

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(-u, -v)\, g(x+u, y+v)\, du\, dv$$

It is obvious then that the convolution of $f(x, y)$ and $g(x, y)$ is identical to the correlation of $f(-x, -y)$ and $g(x, y)$, and the correlation of $f(x, y)$ and $g(x, y)$ is identical to the convolution of $f(-x, -y)$ and $g(x, y)$.
If f is an even function, then convolution and correlation are equivalent operations. Otherwise, we can think of convolution as a process which correlates $g(x, y)$ with a *flipped* version of the function f, that is, by replacing $f(x, y)$ with $f(-x, -y)$.

Here are some useful identities:

1. $f \otimes g = g \otimes f$
2. $f * g = g * f$
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$
4. $f(x, y) * g(x, y) = f(-x, -y) \otimes g(x, y)$

Проблема устойчивости решения систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Az = u,$$

в которой z и u - векторы, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \Re^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \Re^m$, A - матрица с элементами $a_{ij} = \{A\}_{ij}$, где $j = 1,2,\ldots,n$; $i = 1,2,\ldots,m$ (матрица размера $m \times n$).

Практическое решение такой системы уравнений (т.е. нахождение вектора решения по исходной информации - известной матрице A и правой части уравнения u), обычно основано на использовании той или иной стандартной компьютерной программы. Существует большое количество эффективных численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений и, соответственно, их программных реализаций. В то же время, использование без дополнительного анализа получаемых на их основе результатов (если таковые имеются, - часто программы вообще не могут найти решения), может привести к серьезным практическим ошибкам. Для правильной постановки задачи, выбора программы и интерпретации результатов очень важно быть знакомым с основными трудностями, возникающими при решении систем линейных уравнений, и с путями их преодоления.

Предварительные сведения.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие понятия:

Определение 1. Матрица A^* размера $n \times m$ называется *сопряженной* по отношению к матрице A размера $m \times n$, если $\left\{A^*\right\}_{ji} = \left\{A\right\}_{ij}$ для всех i, j.

Определение 2. Число λ называется *собственным значением* (*собственным числом*) матрицы A, если существует такой ненулевой вектор x, что $Ax = \lambda x$.

Определение 3. Арифметические значения квадратных корней из собственных значений матрицы $A^* A$ называются *сингулярными числами* матрицы A.

Определение 4. Вещественное число $\|A\|$ поставленное в соответствие матрице A называется *нормой матрицы*, если выполнены следующие аксиомы:

$$\|A\| > 0,\ \text{если}\ A \neq 0, \quad \|0\| = 0;\ \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|,\ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \|AC\| \leq \|A\| \cdot \|C\|$$

для любого числа λ и любых матриц A, B и C.

Существуют различные нормы матриц, используемые в линейной алгебре. Наиболее употребительными являются:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{(1 - норма);}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(}\infty\text{ - норма);}$$

$$\|A\|_M = M(A) = (mn)^{1/2} \max_{i,j} |a_{ij}| \qquad \text{(M – норма);}$$

$\|A\|_2$ = максимальному сингулярному числу матрицы (спектральная норма);

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(евклидова норма).}$$

В литературе встречаются также другие названия этих же норм.

Влияние неточности исходной информации.

Коэффициенты и свободные члены систем линейных уравнений

$$Az = u\,,$$

возникающих при решении практических задач обычно известны не точно, а с некоторыми погрешностями. Т.о., вместо коэффициентов a_{ij} этой системы и правой части u, известны возмущенные матрица $\breve{A}$ и правая часть $\breve{u}$ такие, что:

$$\left\|A-\breve{A}\right\| \le \delta_A; \quad \left\|u-\breve{u}\right\| \le \delta_u\,.$$

Здесь норма матриц определяется одним из перечисленных выше способов.

Приведем пример, иллюстрирующий проблему неустойчивости получаемого решения по отношению к ошибкам во входных данных:

Пример. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0.99 \\ 1 & 1.01 \end{Vmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix},$$

т.е. дана система уравнений

$$z_1 + 0.99 z_2 = 1.01,$$
$$z_1 + 1.01 z_2 = 0.99.$$

Её решением является

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Не изменяя матрицу A, рассмотрим систему с возмущенной правой частью $\tilde{u}$:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 0.99 \end{pmatrix}, \text{ т.е. решим систему } Az = \tilde{u}.$$

Полученное решение $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 0 \end{pmatrix}$, сильно отличается от решения исходной невозмущенной задачи, хотя правая часть была возмущена очень мало.

Замечание. Отметим, что в данном примере определитель матрицы A мал (он равен 0.02). Кроме того, в курсе линейной алгебры при решении систем линейных уравнений всегда требуется, чтобы "матрица A была невырожденной" (т.е. определитель матрицы отличен от нуля). Казалось бы, что для устойчивости решения достаточно потребовать, чтобы определитель матрицы "не был мал", но это требование не имеет смысла при практических вычислениях. Действительно, рассмотрим матрицу

$$\begin{Vmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} \end{Vmatrix},$$

определитель которой равен 1. Ясно что малое возмущение этой матрицы может сделать определитель очень малым, а систему неустойчивой.

Приведем геометрическую интерпретацию влияния погрешности на получаемое решение. Пусть нам дана исходная система линейных уравнений с матрицей A, имеющей размер 2×2:

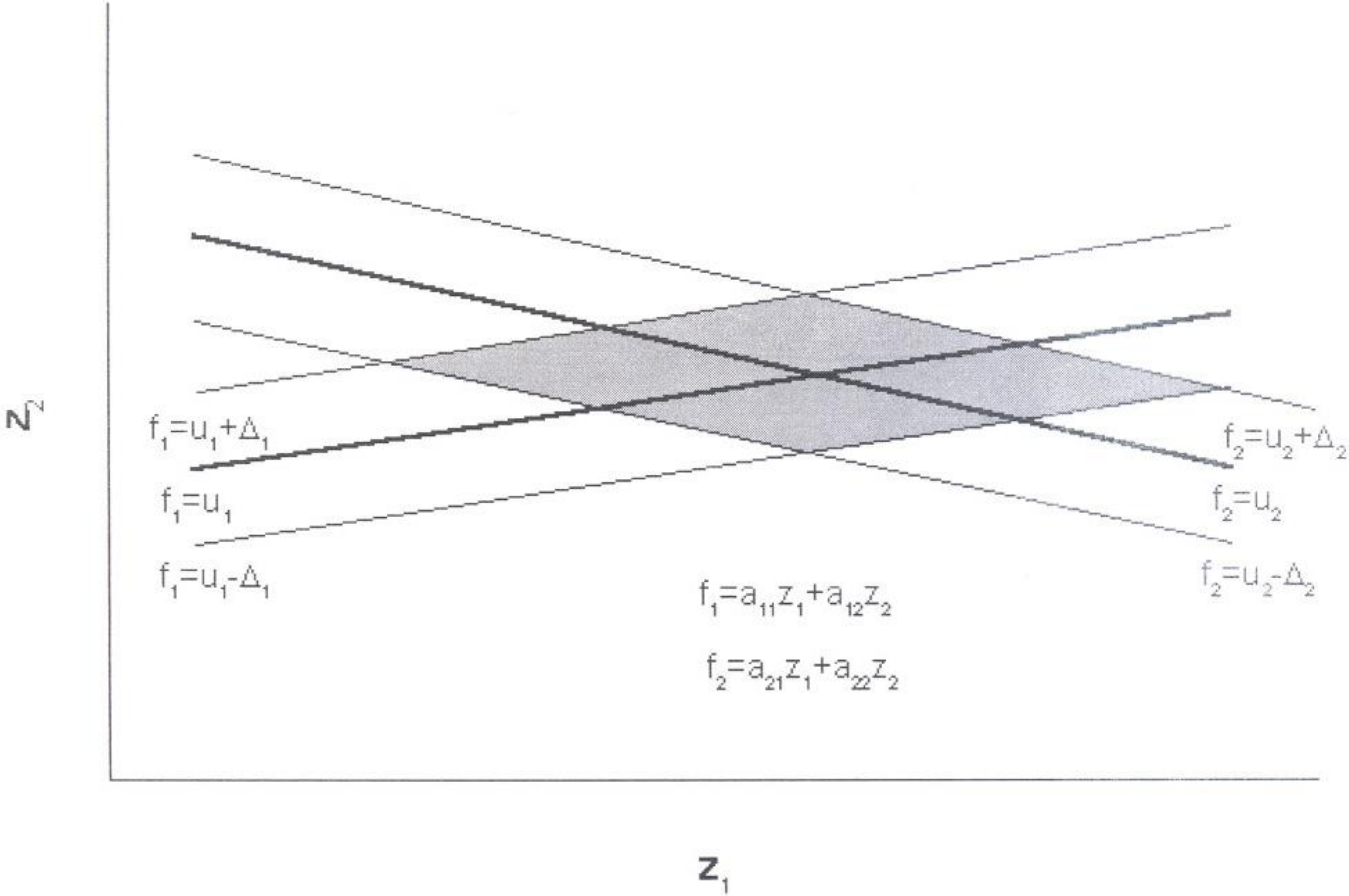
$$f_1(z_1, z_2) = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = u_1,$$

$$f_2(z_1, z_2) = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 = u_2.$$

Матрицу A считаем невозмущенной, а правую часть u заданной приближенно:

$$\breve{u}_1 \in (u_1 - \Delta_1, u_1 + \Delta_1);\ \breve{u}_2 \in (u_2 - \Delta_2, u_2 + \Delta_2).$$

Геометрически каждое уравнение невозмущенной системы изображается прямой линией на плоскости. Соответствующее уравнение возмущенной системы – параллельной ей прямой, которая лежит внутри некоторой полосы (см. рис.). Для первого уравнения, например, полоса ограничена прямыми $f_1 = u_1 - \Delta_1$ и $f_1 = u_1 + \Delta_1$.



$f_1=u_1+\Delta_1$
$f_1=u_1$
$f_1=u_1-\Delta_1$
$f_2=u_2+\Delta_2$
$f_2=u_2$
$f_2=u_2-\Delta_2$
$f_1=a_{11}z_1+a_{12}z_2$
$f_2=a_{21}z_1+a_{22}z_2$
z_2
z_1

Таким образом, решения возмущенной системы лежат внутри параллелограмма, являющегося пересечением полос. При этом длина вектора ошибки может достигать половины длины наибольшей диагонали параллелограмма. Эта длина тем больше, чем меньше угол между прямыми $f_1 = u_1$ и $f_2 = u_2$.

Возмущение матрицы A может привести, кроме того, к дополнительному повороту прямых изображающих уравнения, но и при этом *плохая обусловленность* системы связана с малостью угла между прямыми.

В заключение отметим важность правильного *масштабирования* решаемой системы уравнений при практических вычислениях. Данный процесс бывает полезен в случае, когда среди коэффициентов и свободных членов встречаются сильно различающиеся по величине. Действительно, если систему уравнений

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_2 &= -1, \end{aligned} \qquad (*)$$

геометрическая интерпретация которой дает перпендикулярные прямые на плоскости, заменить на эквивалентную систему

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ 10^{-4} z_2 &= -10^{-4}, \end{aligned} \qquad (**)$$

то малое возмущение правой части системы (**) приводит к сильному изменению решения. Т.о., при решении конкретной задачи необходимо сперва попытаться произвести масштабирование, т.е. получить, за счет умножения уравнений на некоторые множители, близкие по порядку коэффициенты и свободные члены в системе. Масштабирование для уравнения (**), например, заключается в умножении второго уравнения на 10^4.

Число обусловленности матрицы.

При изучении устойчивости решения системы линейных алгебраических уравнений $Az = u$ с матрицей A размера $n \times n$, важную роль имеет такая характеристика, как *число обусловленности* $c(A)$ матрицы. Оно определяется формулой

$$c(A) = \left\|A^{-1}\right\| \cdot \left\|A\right\|,$$

где матрица A^{-1} - матрица *обратная* к матрице A, т.е. матрица удовлетворяющая равенству $A^{-1}A = E$ (E - *единичная* матрица размера $n \times n$, у которой элементы $\{E\}_{ii} = 1$, а элементы $\{E\}_{ij} = 0$, при $i \neq j$).

Замечание. Необходимо отметить, при определении числа обусловленности матрицы используется матричная норма и значение числа обусловленности матрицы будет различным для разных матричных норм.

Если мы используем одну и ту же матричную норму, то чем больше число обусловленности матрицы, тем большее относительное возмущение решения системы $Az = u$ возможно при таких же относительных возмущениях исходных данных.

Приведем некоторые элементарные свойства числа обусловленности матрицы, верные для любых матричных норм:

$$c(A) = c(A^{-1});$$

$$c(AB) \le c(A) \cdot c(B);$$

$$c(A) \ge 1.$$

Для спектральной нормы, число обусловленности

$$c_2(A) = \frac{\alpha_1}{\alpha_n},$$

где α_1 и α_n - наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы A.

Оно связано с числом обусловленности в наиболее употребляемой в практике евклидовой норме неравенствами

$$c_2(A) \le c_E(A) \le n \cdot c_2(A).$$